ALGEBRA II – INTEGRADOR 03-02-2021 – RESOLUCIÓN SEGUNDA PARTE

---

1. El área del triángulo Δ de vértices 0, e_1 y e_2 es

$$\acute{A}rea(\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{\det\begin{bmatrix} <e_1,e_1> & <e_1,e_2> \\ <e_2,e_1> & <e_2,e_2> \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{\|e_1\|^2\|e_2\|^2 - <e_1,e_2>^2}$$

Recordemos: $\|e_1\|^2\|e_2\|^2 - <e_1,e_2>^2 = \|e_1\|^2\|e_2\|^2\left(1 - \overbrace{\frac{<e_1,e_2>^2}{\|e_1\|^2\|e_2\|^2}}^{\cos(\theta)^2}\right) = \|e_1\|^2\|e_2\|^2 sen(\theta)^2$ es el cuadrado del área del paralelogramo determinado por e_1 y e_2, siendo θ la medida del ángulo entre estos dos vectores.

Ahora bien, por hipótesis, los tres lados del triángulo tienen la misma longitud, que indicaremos con r :

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_2 - e_1\| = r \qquad (1)$$

Por lo tanto, puesto que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{3}}{4}$, tenemos que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{r^4 - <e_1,e_2>^2} \qquad (2)$$

Por otra parte, de (1) resulta

$$r^2 = \|e_2 - e_1\|^2 = \|e_1\|^2 - 2<e_1,e_2> + \|e_2\|^2 = 2r^2 - 2<e_1,e_2>$$

es decir:
$$r^2 = 2<e_1,e_2> \qquad (3)$$

Reemplazando en (2): $\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{4<e_1,e_2>^2 - <e_1,e_2>^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}|<e_1,e_2>|$. Puesto que $<e_1,e_2> \overset{(3)}{=} \frac{r^2}{2} > 0$, tenemos finalmente que

$$<e_1,e_2> = \frac{1}{2} \text{ y } \|e_1\|^2 = \|e_2\|^2 = r^2 \overset{(3)}{=} 1 \qquad (4)$$

La proyección ortogonal de $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3e_1 + 5e_2$ sobre el subespacio generado por $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1 + e_2$ es

$$\pi(x)=\frac{<x,w>}{\|w\|^2}w=\frac{<3e_1+5e_2,e_1+e_2>}{<e_1+e_2,e_1+e_2>}w=\frac{3\overbrace{\|e_1\|^2}^{=1}+8\overbrace{<e_1,e_2>}^{=\frac{1}{2}}+5\overbrace{\|e_2\|^2}^{=1}}{\underbrace{\|e_1\|^2}_{=1}+2\underbrace{<e_1,e_2>}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\|e_2\|}_{=1}}w=\frac{12}{3}w$$

es decir: $\pi(x)=4(e_1+e_2)$. Entonces, la distancia buscada es

$$\|x-\pi(x)\|=\|3e_1+5e_2-4e_1-4e_2\|=\|-e_1+e_2\|=r=1$$

***Respuesta ejercicio* 1**: la distancia del punto $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ al subespacio generado por $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ es 1.

Momento cultural: La fórmula de Herón. Hace 2.000 años, en Alejandría había ingenieros. Uno de ellos, llamado Héron, parece que descubrió una fórmula para calcular el área de un triángulo en función de sus lados. La fórmula es la siguiente: si *a*, *b* y *c* son los lados del triángulo e indicamos con *s* la mitad de su perímetro, entonces el área del triángulo es $\acute{A}rea(\Delta)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. En nuestro caso, $a=b=c=r$ y el perímetro es 3*r*. Entonces, $\acute{A}rea(\Delta)=\sqrt{\frac{3r}{2}\left(\frac{3r}{2}-r\right)^3}=\sqrt{\frac{3r}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^3}=\sqrt{\frac{3r^4}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.

Puesto que por hipótesis el área del triángulo es $\frac{\sqrt{3}}{4}$, se deduce inmediatamente que *r* = 1, como habíamos calculado.

---

2. Para que el espacio nulo de la matriz

$$A-3I=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\ 2 & a-3 & b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

tenga dimensión 2, es necesario y suficiente que las dos primeras filas sean linealmente dependientes, y esto solo ocurre si *a* = 1 y *b* = -3 (las cuentas son extremadamente sencillas). Entonces, nuestra matriz es $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$. Por el mismo dato del enunciado, sabemos que tiene un autovalor doble 3 (no puede ser autovalor triple pues la la traza es 5 y por lo tanto el otro autovalor es -1). Puesto que la multiplicidad geométrica de 3 es 2, resulta que *A* es diagonalizable. De hecho, haciendo cuentitas sencillas obtenemos, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}^{u}=\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}=3u, \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix}}^{v}=\begin{bmatrix}0\\9\\-6\end{bmatrix}=3v,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -w$$

La solución general del sistema $Y' = AY$ es, entonces, $Y(t) = c_1 e^{3t} u + c_2 e^{3t} v + c_3 e^{-t} w$, donde c_1, c_2 y c_3 son tres constantes reales arbitrarias. Para que se verifique $\underset{t \to +\infty}{Lim} Y(t) = 0$, es necesario y suficiente que $c_1 = c_2 = 0$. Por lo tanto, las soluciones del sistema que verifican $\underset{t \to +\infty}{Lim} Y(t) = 0$ son $Y(t) = c_3 e^{-t} w$, donde c_3 es una constante real cualquiera. Para estas soluciones, la condición inicial es $Y(0) = c_3 w$, por lo tanto, la respuesta es:

***Respuesta ejercicio* 2:** $Y_0 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c \in \Re$.

---

3. Dado que $\det(A) \neq 0$, la matriz A es inversible. Entonces podemos razonar de la siguiente manera:

$$y \in T(S_1) \Leftrightarrow \exists x \in S_1 : y = Ax \Leftrightarrow A^{-1} y \in S_1 \Leftrightarrow \left\| A^{-1} y \right\|^2 = 1$$

Es decir: los $y \in \Re^2$ del conjunto que buscamos son los que satisfacen la ecuación $\left\| A^{-1} y \right\|^2 = 1$, por lo tanto lo que debemos determinar es el conjunto de nivel 1 de la forma cuadrática

$$Q(y) = \left\| A^{-1} y \right\|^2 = < A^{-1} y, A^{-1} y > = < (A^{-1})^t A^{-1} y, y >$$

La matriz asociada a esta forma cuadrática es

$$M = (A^{-1})^t A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{-5}{40} & \frac{7}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{40} & \frac{-5}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{7}{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{1600} & \frac{-18}{1600} \\ \frac{-18}{1600} & \frac{74}{1600} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{800} & \frac{-9}{800} \\ \frac{-9}{800} & \frac{37}{800} \end{bmatrix}$$

Exhibimos autovalores y autovectores de M en las siguientes comprobaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{800} & \frac{-9}{800} \\ \frac{-9}{800} & \frac{37}{800} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{800} \\ \frac{10}{800} \end{bmatrix} = \frac{10}{800} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \frac{13}{800} & \frac{-9}{800} \\ \frac{-9}{800} & \frac{37}{800} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-40}{800} \\ \frac{120}{800} \end{bmatrix} = \frac{40}{800} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces los autovectores ortonormales $\breve{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\breve{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociados a los autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{80}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{20}$ respectivamente. Por lo tanto, indicando con w_1, w_2

las coordenadas de y respecto de la base ortogonal $\{\breve{u}_1, \breve{u}_2\}$, es decir: $y = w_1\breve{u}_1 + w_2\breve{u}_2$, tenemos que

$$Q(y) = 1 \Leftrightarrow \ < My, y > = 1 \Leftrightarrow \ \frac{1}{80}w_1^2 + \frac{1}{20}w_2^2 = 1$$

Por lo tanto, el conjunto de nivel 1 de la forma cuadrática, que es la imagen buscada, es:

***Respuesta* 3:** La elipse con centro en el origen y vértices en $\sqrt{80}\breve{u}_1 = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \sqrt{8}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ y $-\frac{1}{\sqrt{80}}\breve{u}_1 = -\sqrt{8}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ (éstos son los vértices del eje mayor), y $\sqrt{20}\breve{u}_2 = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix} =$ $\sqrt{2}\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$ y $-\sqrt{20}\breve{u}_2 = -\sqrt{2}\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$ (vértices del eje menor).

---

4. La matriz de la forma cuadrática es

Mediante el cambio de variables $\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = \sqrt{3}x_2 \end{cases}$, lo que debemos estudiar son los extremos de la forma cuadrática $Q(x') = 3x'^2_1 + \frac{8}{\sqrt{3}}x'_1\,x'_2 + 3x'^2_2$ con la restricción $x'^2_1 + x'^2_2 = 3$. La matriz simétrica asociada a la forma es $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 3 \end{bmatrix}$ .Exhibimos autovalores y autovectores de A en las siguientes comprobaciones:

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \overbrace{\left(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)}^{\lambda_1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \overbrace{\left(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)}^{\lambda_2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

Utilizando la base ortonormal $\breve{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\breve{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, para cada $x' = y_1\breve{u}_1 + y_2\breve{u}_2$ tenemos $Q(x') = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ y $y_1^2 + y_2^2 = x'^2_1 + x'^2_2 = 3$. Entonces:

$$\text{(min)} \qquad Q(x') = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2\overbrace{(3 - y_1^2)}^{=y_2^2} = 3\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)y_1^2 = 3\lambda_2 + \frac{8}{\sqrt{3}}y_1^2 \geq 3\lambda_2$$

y alcanza este valor sii $y_1 = 0$ (y por lo tanto $y_2^2 = 3$)

(max) $$Q(x') = \lambda_1 \overbrace{(3 - y_2^2)}^{=y_1^2} + \lambda_2 y_2^2 = 3\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) y_2^2 = 3\lambda_1 - \frac{8}{\sqrt{3}} y_2^2 \leq 3\lambda_1$$

y alcanza este valor sii $y_2 = 0$ (y por lo tanto $y_1^2 = 3$)

(Este análisis puede obviarse mediante el Teorema de Rayleigh, obviamente). Por lo tanto:

***Respuesta* 4:**

a) El valor máximo de la forma cuadrática con la restricción dada es $3\lambda_1 = 3\left(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ y lo alcanza en los puntos $x'_{\max} = \sqrt{3}\breve{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y su opuesto. En términos de las variables originales, son los puntos $x_{\max} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y su opuesto.

b) El valor mínimo de la forma cuadrática con la restricción dada es $3\lambda_2 = 3\left(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ y lo alcanza en los puntos $x'_{\min} = \sqrt{3}\breve{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y su opuesto. En términos de las variables originales, son los puntos $x_{\min} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y su opuesto.
